

# Modelos de transformación entre ED50 y ETRS89

Javier González-Matesanz<sup>(1)</sup> y Adolfo Dalda-Mourón<sup>(1)</sup>

<sup>(1)</sup>Instituto Geográfico Nacional de España

[figmatesanz@mfom.es](mailto:figmatesanz@mfom.es), [adalda@mfom.es](mailto:adalda@mfom.es)

General Ibáñez Ibero 3, 28003 Madrid, España

## RESUMEN

*El cambio de datum en cualquier país es sin duda uno de los mayores retos hoy en día. Existe una gran comunidad de usuarios que utilizan de manera directa o indirecta cartografía y sistemas de navegación basados en Sistemas Geodésicos de Referencia espaciales como WGS84, o ETRS89 en Europa, a pesar de que sigue siendo oficial para fines cartográficos y topográficos un datum local, en España ED50. Es necesario realizar una transición de datum local a geocéntrico de forma muy certera sin minorar esfuerzos en cuanto a la información y difusión de la óptima solución para su transformación.*

## 1. INTRODUCCIÓN

La intención del datum ED50 (European Datum 1950) fue dotar a toda Europa de una homogeneidad geodésica que los sistemas locales no poseían, siendo éste en España oficial hoy en día. La unificación no ha sido adoptada de forma general debido a la heterogeneidad que presenta ED50 por zonas, coexistiendo por tanto en algunos países éste y los antiguos datums locales, además de distintos sistemas de proyección.

La transición de los diferentes Sistemas Geodésicos de Referencia en Europa al ETRS89 (European Terrestrial Reference System 1989) forma parte del paquete de recomendaciones de EUREF y del grupo VIII de EuroGeographics para Europa para los próximos años, junto con las siguientes proyecciones cartográficas:

- Transversa Mercator para grandes escalas hasta 1:500.000
- Cónica conforme de Lambert para escalas menores de 1:500.000
- Azimutal equiárea para fines estadísticos

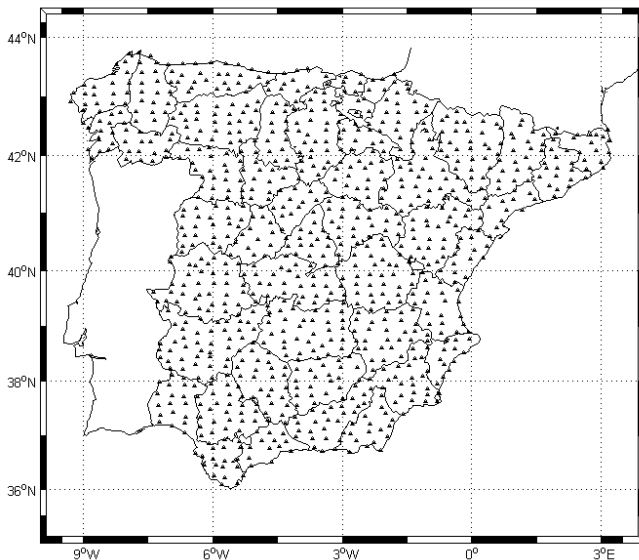


Figura 1. Campaña REGENTE península

El usuario actual demanda en muchos aspectos un datum unificado y compatible con los sistemas de posicionamiento global. El cambio a un datum de estas características dentro de la sociedad de la información actual, presenta la indiscutible ventaja de automatización del proceso, pero a la vez corre el peligro de ser trivializado a una “opción de menú” en un software determinado. El cambio ha de ser gradual que no debe de oficializarse sin haber

informado y formado a la comunidad de usuarios sobre las ventajas que conlleva y haber preparado un manual técnico del sistema de transformación empleado junto con la inclusión de un apéndice de conocimientos geodésicos básicos. Es entonces cuando se debe dar el salto a decretar su uso, poniendo a disposición de los usuarios todas las utilidades necesarias para facilitar esta transición. Es lógico pretender no solo transformar la cartografía sino también recalcular la propia red geodésica en el nuevo Sistema de Referencia Geodésico, lo que constituye el objetivo prioritario de este estudio. La estrategia a seguir, que debe garantizar el método de transformación (Collier 1996), debe responder a las características siguientes:

- Ser una transformación única.
- Sencilla de aplicar.
- Disponible de manera amigable para los usuarios de información espacial.
- Capacidad de transformar grandes cantidades de datos con eficiencia.
- Integrable en un Sistema de Información Geográfica.
- Asumir la conversión teórica de un sistema en otro.
- Además, imitar los resultados de un reajuste de red modelando pequeños sistematismos y cambios de forma.

## 2. REDES GEODÉSICAS EN ESPAÑA

Actualmente España cuenta con más de 11.000 vértices correspondientes a la red de triangulación de tercer orden, con observaciones nuevas realizadas entre mediados de los 70 y mediados de los 80; está constreñida a la red de primer orden y procede “en origen” del cálculo realizado por el antiguo AMS (Army Map Service) de EEUU para toda Europa (sistema ED50). La subcomisión RETRIG de IAG revisó la red europea de primer orden unificada y, a lo largo de los años, fue consolidándola con la inclusión de nuevas mediciones –cabe hacer mención especial de las campañas doppler por traslocación-, dando lugar a sucesivas soluciones como ED79 y ED87, cuyo uso no se ha generalizado, al menos en España.

En los últimos tiempos las medidas “terrestres” han caído casi en desuso, de modo especial a partir de la aparición de GPS. Así, se crea en 1987 la Subcomisión EUREF como sucesora de la desaparecida RETRIG.

Bajo sus auspicios se realiza la primera campaña GPS europea, a la que contribuyen todos los países de Europa occidental para dotarse de un sistema común homogéneo, ETRS89. Como la constelación NAVSTAR estaba incompleta, a lo que se unía el elevado ruido de los receptores de entonces, se recomendó reobservar y densificar dicha red en los distintos países bajo condiciones semejantes de observación, a cuyo amparo nace la red IBERIA95.

IBERIA95 se observó por el IGNE en colaboración con el IPPC (Instituto Portugués de Cartografía e Cadastro) y diversos

organismos españoles en la semana del 8 al 12 de mayo de 1995. Está formada por 27 estaciones españolas y 12 portuguesas, y se amplía posteriormente a las Islas Baleares en la campaña BALEAR98 que incluye dos estaciones por cada una de las 3 islas principales, quedando constituida la red de "orden 0".

Al mismo tiempo, la densificación uniforme de esta red IBERIA95 se ha desarrollado por el proyecto REGENTE (Red Geodésica Nacional mediante Técnicas Espaciales) en sucesivas campañas que han finalizado en el 2001 (Regidor 2000). Está constituida por unos 1078 vértices en la Península y Baleares, uno por cada hoja del Mapa Topográfico Nacional (MTN) 1:50.000, lo cual supone una distancia media entre vértices de 20 a 25 km. En las Islas Canarias se ha procedido de manera semejante y su red se denomina REGCAN95 estando constituida por 72 vértices repartidos entre las siete islas, con un máximo de 21 vértices en la isla de Tenerife y un mínimo de 5 en cada una de las islas menores de El Hierro y La Gomera.

En todas estas campañas se ha dotado a los vértices de altitud ortométrica a partir de clavos cercanos de la red de nivelación de alta precisión (NAP). El producto final ha sido un excelente conjunto de vértices con doble juego de coordenadas ED50 y ETRS89, lo que permite hallar distintos modelos de transformación presentados en este artículo. El verdadero reto es tratar de absorber las heterogeneidades que se dan en las redes clásicas fruto de factores como son la evolución de las técnicas de observación o los propios métodos y condiciones para compensar la antigua red.

### 3. TRANSFORMACIÓN DE 5 PARÁMETROS

Considerando que ambos sistemas son paralelos y con sendos juegos de coordenadas tridimensionales se obtiene el desplazamiento medio entre ambos orígenes de los triedros de referencia, esto es:  $\Delta X$ ,  $\Delta Y$ ,  $\Delta Z$ . Los dos parámetros restantes corresponden a la diferencia en los semiejes mayores y el aplamamiento de ambos elipsoides ( $\Delta a$ ,  $\Delta f$ ).

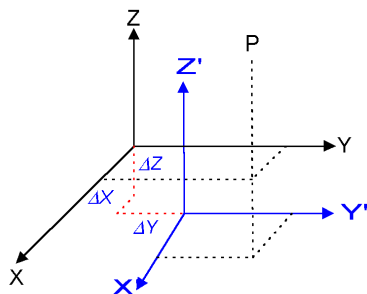


Figura 2. Transformación entre sistemas paralelos

Con los 5 parámetros obtenidos, las expresiones para obtener los incrementos en longitud, latitud y altura elipsoidal son las siguientes:

$$\begin{aligned} (R_M + h)\Delta\varphi &= \sin\varphi\cos\lambda\Delta X_0 + \sin\varphi\sin\lambda\Delta Y_0 - \cos\varphi\Delta Z_0 \dots \\ &\dots - (R_M a/b + R_N b/a)\sin\varphi\cos\varphi\Delta f - (R_N e^2 \sin\varphi\cos\varphi)\Delta a \\ (R_N + h)\cos\varphi\Delta\lambda &= \sin\lambda\Delta X_0 - \cos\lambda\Delta Y_0 \\ \Delta h &= -\cos\varphi\cos\lambda\Delta X_0 - \cos\varphi\sin\lambda\Delta Y_0 - \sin\varphi\Delta Z_0 + a/R_N\Delta a - R_N b/a \sin^2\varphi\Delta f \end{aligned}$$

Los residuos en este tipo de transformación resultan ser de hasta 9 m cubriendo un área como la península ibérica (~500000 km<sup>2</sup>). Este modelo de transformación es de aplicación típica en equipos GPS de bajo costo que incluyen generalmente parámetros de transformación para casi todos los datums locales/regionales publicados por la DMA (Technical Report TR8350.2).

Los calculados de ETRS89 a ED50 para la Península Ibérica son los siguientes:  $\Delta X=87.835\text{m}$ ,  $\Delta Y=105.771\text{m}$  y  $\Delta Z=122.500\text{m}$ . Los residuos con los puntos de la campaña REGENTE se muestran en la Tabla 1.

Tabla 1. Residuos en la Transformación península 5p

Estadísticas	E	N
# puntos	992	992
Media	-0.05	-0.09
Std Dev	3.44	2.47
Max	8.60	6.84
Min	-7.80	-4.75
Rango	16.40	11.59
95%	6.88	4.95
99%	8.59	6.19

### 4. TRANSFORMACIÓN DE 7 PARÁMETROS

Si se considera la relación de semejanza espacial (Helmert), es decir, tres componentes de traslación, tres de rotación y un factor de escala, se llega al modelo conocido como Bursa-Wolf o Molodetsky-Badekas. Ambos juegos de coordenadas se relacionan por la expresión:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{ED50} = \begin{bmatrix} \Delta X_0 \\ \Delta Y_0 \\ \Delta Z_0 \end{bmatrix} + (1 + \mu) \begin{bmatrix} 1 & \Omega_z & -\Omega_y \\ -\Omega_z & 1 & \Omega_x \\ \Omega_y & -\Omega_x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{ETRS89} \quad \text{Ec. 1}$$

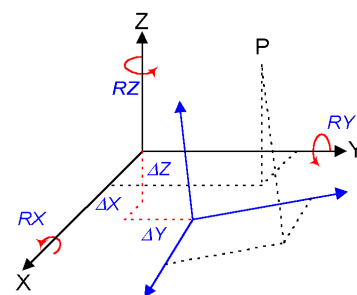


Figura 3. Transformación de 7 parámetros (Collier 1998)

El resultado aplicado a la red muestra diferencias locales, tal y como cabría esperar en cualquier red clásica, no siendo posible abarcar la totalidad de la Península Ibérica obteniendo residuos por debajo de 2m. Por ello, se ha dividido el territorio peninsular en dos partes añadiendo un tercer otro juego de parámetros para las Islas Baleares (figura 4).

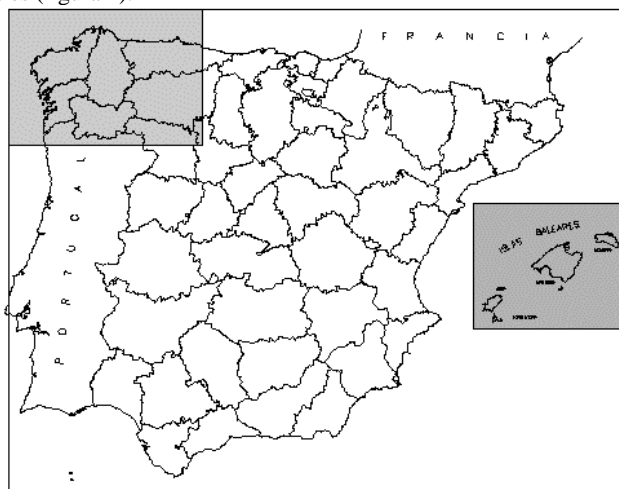


Figura 4. Juegos de 7 parámetros para península y Baleares

Es preciso recordar que tanto esta transformación como la de 5 parámetros se realizan entre coordenadas espaciales. Por tanto, para obtener altitud elipsoidal en ED50 es siempre imprescindible disponer de valores de ondulación en este sistema local que se obtienen de un modelo de geoida (geocéntrico) mediante un proceso

iterativo que parte de considerar N=0, o valor conocido, en el punto origen (Datum) o bien con 5/7 parámetros de transformación a priori.

**Tabla 2. Parámetros de transformación de ETRS89 a ED50**

	NW_PENINS.	PENINSULA	BALEARES
$\Delta X_0$ (m)	178.383	131.032	181.4609
$\Delta Y_0$ (m)	83.172	100.251	90.2931
$\Delta Z_0$ (m)	221.293	163.354	187.1902
$\mu$ (ppm)	-21.2	-9.39	-17.57
$\Omega_X$ (")	0.5401	-1.2438	0.1435
$\Omega_Y$ (")	-0.5319	-0.0195	0.4922
$\Omega_Z$ (")	-0.1263	-1.1436	-0.3935

**Tabla 3. Residuos en la Transformación península 7p**

Estadísticas	E <sub>p</sub>	N <sub>p</sub>	E <sub>NWP</sub>	N <sub>NWP</sub>
# puntos	829	829	162	162
Media	0.03	0.18	0.02	-0.07
Std Dev	0.62	0.56	0.40	0.25
Max	1.80	2.24	1.28	0.57
Min	-2.28	-2.37	-0.80	-0.76
Rango	4.08	4.61	2.08	1.33
95%	1.23	1.11	0.79	0.50
99%	1.54	1.39	0.99	0.62

La zona NW corresponde a los meridianos y paralelos siguientes: 41°30'N < φ < 43°50'N y 9°25'W < λ < 4°30'W. Esta transformación, junto con la de 5 parámetros conservaría la conformidad pero presentaría el inconveniente de no ser una transformación única.

### 5. TRANSFORMACIÓN MEDIANTE POLINOMIOS EN VARIABLE REAL O COMPLEJA

Es lógico pensar que un polinomio pueda absorber de manera más eficaz las heterogeneidades de la red. En el caso de utilizar variables reales se plantean estos dos polinomios:

$$\varphi^i = C_1 + C_2 \lambda + C_3 \varphi + C_4 \lambda^2 + C_5 \lambda \varphi + C_6 \varphi^2 + C_7 \lambda^3 \dots \quad \text{Ec. 2}$$

$$\lambda^i = C'_1 + C'_2 \lambda + C'_3 \varphi + C'_4 \lambda^2 + C'_5 \lambda \varphi + C'_6 \varphi^2 + C'_7 \lambda^3 \dots$$

o bien, se considera uno solo en variable compleja, lo que equivale a imponer a los dos anteriores la condición de conformidad:

$$\lambda^i + i\psi^i = \sum_{j=0}^n (K_j + iK'_j)(\lambda + i\psi)^j \quad \text{Ec. 3}$$

donde ψ es la latitud isométrica. La fiabilidad en el cálculo de los coeficientes constituye el verdadero reto de esta regresión polinómica, que se resuelve teniendo en cuenta casi una decena de aspectos estadísticos y numéricos.

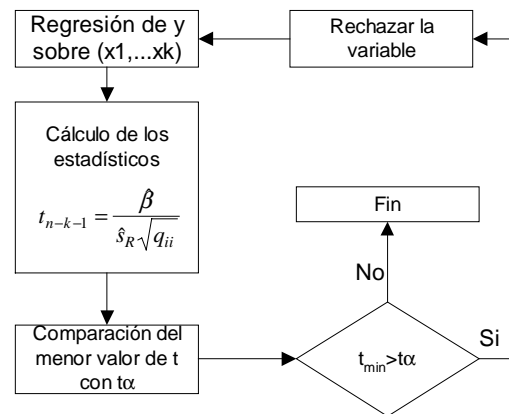
Para comprobar la utilidad del método se ha procedido a aplicarlo con ambos juegos de coordenadas en proyección UTM huso 30 extendido.

**Tabla 4. Transformación polinómica real y compleja. Residuos**

Estadísticas	E <sub>Real</sub>	N <sub>Real</sub>	E <sub>i</sub>	N <sub>i</sub>
# puntos	991	991	991	991
Media	0.00	0.00	0.00	0.00
Std Dev	0.37	0.36	0.24	0.22
Max	0.98	1.48	0.94	1.03
Min	-1.66	-1.56	-1.09	-0.77

<b>Rango</b>	2.64	3.04	2.03	1.80
<b>95%</b>	0.75	0.75	0.48	0.44
<b>99%</b>	0.93	0.89	0.60	0.55

La elección del polinomio óptimo es uno de los problemas más estudiados en cualquier bibliografía sobre regresión. Los métodos más comunes son: “eliminación progresiva”, “introducción progresiva” y “regresión paso a paso”. El primero de ellos se basa en la regresión de la variable respuesta sobre todas aquellas que le pueden influir, reduciendo el modelo término a término mediante el estadístico t; el segundo de los métodos es básicamente inverso al anterior; por último, en el tercero (paso a paso) se van incluyendo las variables más correladas con la respuesta, evaluando de nuevo las ya introducidas y eliminando en su caso alguna de ellas. El método de regresión “paso a paso” fue utilizado por Appelbaum (1982) para el cálculo de los polinomios de la NIMA (TR8350.2). Todos los métodos presentan ventajas e inconvenientes. En este trabajo se ha decidido el método de “eliminación progresiva” porque, si bien presenta como inconveniente disponer de gran capacidad de cálculo y en ocasiones conduzca a problemas de multicolinealidad (singularidad de la matriz de diseño), en contrapartida resulta excelente para evitar la exclusión de variables significativas (Peña 1999).



**Figura 5. Regresión por eliminación progresiva**

En la aplicación del método se han tenido en cuenta la mayoría de las herramientas de regresión para la elección de variables, entre ellas:

- Coeficiente de determinación: R<sup>2</sup> explica el ajuste global del modelo y corresponde al cociente entre la varianza explicada por la regresión y la varianza total.
- Coeficiente de determinación corregido: evita el efecto de que R<sup>2</sup> aumente ficticiamente cuando el número de variables introducidas crece.
- Contrastes individuales de los coeficientes. H<sub>0</sub>: β=0, permite la inclusión de variables, o su exclusión en el avance del proceso.
- Tabla ADEVA. Analiza la varianza explicada y no explicada por el modelo de regresión.
- Estadístico F. Evalúa los coeficientes globalmente.
- Multicolinealidad. Verifica la correlación entre las variables explicativas, el número de condición de la matriz.
- Estudio de los residuos. Explica problemas de falta de linealidad del modelo, variabilidad de la varianza (heterocedasticidad) y adecuación del modelo de regresión.

Estos polinomios nunca deben ser empleados fuera de la zona límite de los datos. Para extender su uso hasta la costa en aquellas partes donde no hay vértices REGENTE se han de emplear puntos “virtuales” obtenidos por transformación lineal de los más cercanos. En el juego de coeficientes que se muestra en la Tabla 5 y Tabla 7 no se ha tenido todavía en cuenta su extensión más allá de los datos, por lo que se reitera una vez más que nunca deben ser extrapolados.

**Tabla 5. Coeficientes en la transformación compleja ED50>ETRS89**

Parte real			Parte imaginaria				
K01	-109.2522	K09	1.6571	K'01	-207.3829	K'09	0.5012
K02	-0.4544	K11	2.9934	K'02	-2.9644	K'11	-2.7989
K03	-0.0372	K12	-3.7204	K'03	-2.4583	K'12	-1.3364
K04	-2.3993	K14	-0.1311	K'04	2.4956	K'14	2.2798
K05	1.6347	K15	4.2371	K'05	-0.8990	K'15	-2.3785
K06	-0.4471	K18	-0.3577	K'06	-0.7011	K'18	1.9785
K07	-0.3434	K19	-0.1908	K'07	-1.6855	K'19	-0.4644
K08	-2.4614			K'08	0.3648		

**Tabla 6. ADEVA y coeficientes de determinación**

ADEVA x+yi	SC	gl	varianza
Variación explicada	4736461.89	29	163326.27
Variación no explicada	249.29	1952	0.13
Variación TOTAL	4736711.18	1981	2391.07
R2=0.99995	MR2=0.99995		

**Tabla 7. Coeficientes en la transformación real ED50>ETRS89**

Polinomio en x			Polinomio en y				
C1	-109.3882	C26	64.2406	C'1	-207.6580	C'19	48.4280
C2	0.5266	C28	3.7208	C'2	-3.7474	C'21	5.7732
C3	4.2647	C33	-124.4893	C'6	3.0959	C'26	-27.3972
C8	-22.3971	C34	123.3594	C'7	5.0779	C'32	-50.9304
C11	2.5091	C35	115.2187	C'8	-14.8440	C'34	-65.6780
C12	24.2807	C40	65.9334	C'10	-3.1048	C'35	-36.6473
C14	19.0328	C42	173.8436	C'11	-3.2725	C'41	79.9785
C16	-7.9747	C43	-169.9654	C'12	3.6327	C'44	-24.2543
C17	21.4543	C53	-179.7413	C'14	-4.1229	C'52	105.2650
C18	32.6296	C54	-175.3249	C'16	-2.4132		
C24	-32.7156	C65	-91.6688	C'17	15.5594		
C25	-161.2014			C'18	-15.0202		

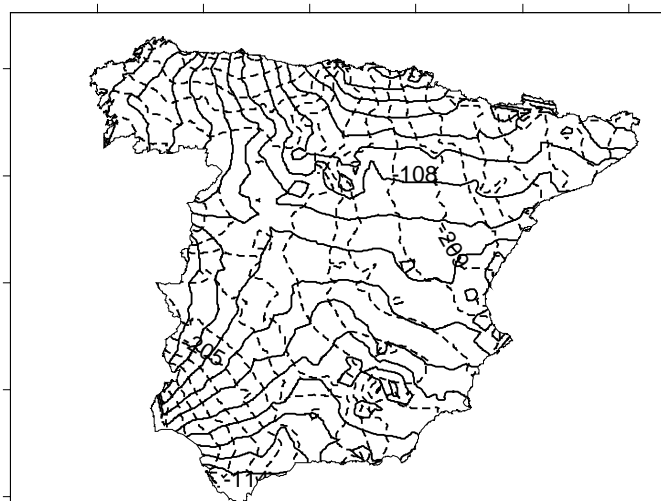
**Tabla 8. Tabla ADEVA y coeficientes de determinación real x**

ADEVA x	SC	gl	varianza
Variación explicada	2491.91	22	113.27
Variación no explicada	56.14	968	0.06
Variación TOTAL	2548.05	990	2.57
R2=0.97797	MR2=0.97747		

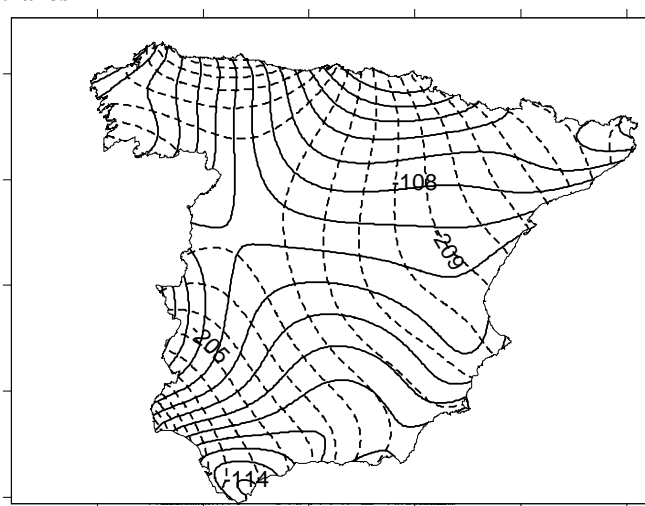
**Tabla 9. Tabla ADEVA y coeficientes de determinación**

ADEVA y	SC	gl	varianza
Variación explicada	3461.01	20	173.05
Variación no explicada	48.47	970	0.05
Variación TOTAL	3509.48	990	3.54
R2=0.98619	MR2=0.98590		

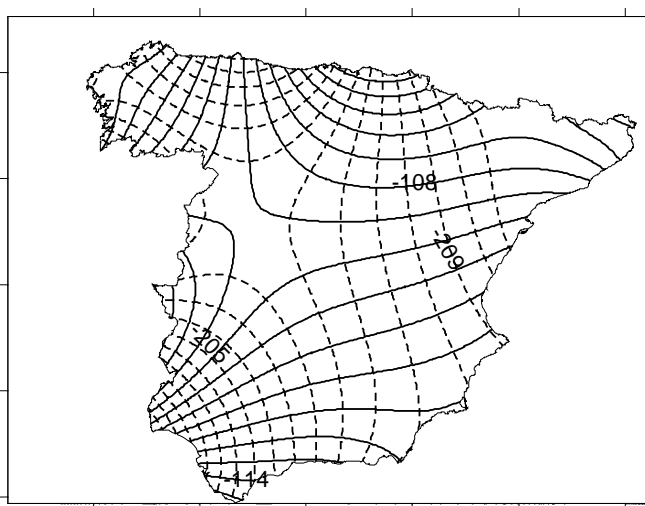
El resultado del ajuste polinómico muestra residuos en torno a lo esperado para este tipo de métodos, siendo especialmente útil la transformación compleja para series cartográficas nacionales ya que, en nuestro caso permite, la transformación de toda la serie del Mapa Topográfico Nacional 1:25.000 con una única expresión. La variabilidad total explicada por los modelos es en ambos polinomios de variable real el 98%, y en el de variable compleja el 99%. El grado inicial de los polinomios es 10 para el caso real y 20 para el complejo. En las figuras (6), (7) y (8) se puede comprobar respectivamente: las diferencias a modelar, el resultado de los polinomios en variable real y el resultado en variable compleja. Dado el elevado grado de los polinomios y la magnitud de las coordenadas, la matriz normal resultante debe ser estabilizada numéricamente. Para ello, se han reducido previamente las coordenadas al centroide (447618.910;4475737.741) y se han escalado mediante el factor 1/500000.



**Figura 6. Diferencias ED50 ETRS89. Componente Este en trazos**



**Figura 7. Polinomio en variable real**



**Figura 8. Polinomio en variable compleja**

## 6. TRANSFORMACIÓN CON MODELADO DE DISTORSIONES

En sí mismo, el cambio de datum debería poder llevarse a cabo mediante traslación, rotación y cambio de escala. Las transformaciones descritas anteriormente se basan en esta característica. Sin embargo, la materialización de la realidad terreno

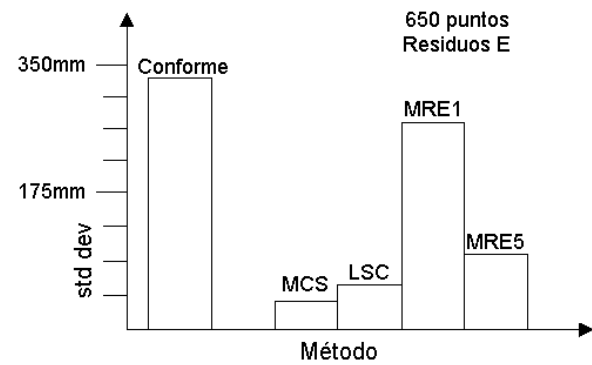
en cada caso provoca ligeros cambios de forma a lo largo de la red por el uso de métodos de medida distintos, criterios de ajuste, errores de medida etc; este hecho no puede ser por tanto modelado mediante una simple transformación conforme (Collier 1998).

Uno de los procedimientos ya ensayados por otros países consiste en los siguientes pasos esenciales:

- Calcular la mejor transformación conforme posible entre los dos datums, esto eliminaría la diferencia entre los mismos debida únicamente al cambio de Sistema Geodésico de Referencia pero no tendría en cuenta el cambio de forma.
- Obtener las diferencias entre el valor en el datum de llegada y el calculado a partir de esta transformación conforme. Éstas representan la distorsión.
- Modelar la distorsión.
- Obtener la transformación conjunta “conformidad+modelo de distorsión”

La posibilidad de modelar la distorsión se basa en la existencia de un patrón regular de comportamiento ya que aquella no presenta aleatoriedad sino una cierta correlación espacial.

La forma de modelar esta distorsión ha sido llevada a cabo por otros autores mediante tres técnicas: a) Superficies de mínima curvatura (MCS) b) Colocación mínimo cuadrática (LSC) y c) Regresión múltiple (MRE)



**Figura 9. Comparación de métodos. Red Victoria, Collier (1996)**

En la figura (9) se pone de manifiesto la comparación de ambos métodos para la red australiana de Victoria. Con un criterio puramente numérico el mejor de los métodos es el de mínima curvatura que ha servido de modelo para la transformación de NAD27 a NAD83 en EEUU. La colocación mínimo cuadrática tiene similar bondad, con la ventaja de permitir estimar en cada punto el error que se está cometiendo al aplicar esta transformación. Además, resulta más versátil si la densidad de puntos es irregular, permitiendo el recálculo de la malla sin necesidad de introducir todos los puntos de nuevo. Este método de colocación (LSC) ha sido el elegido en países como Australia o Canadá. Como se observa en la figura (9), los métodos de regresión múltiple de grado 1 (MRE1) y grado 5 (MRE5) presentan los peores ajustes. En el caso español se cuenta con una distribución de puntos extraordinariamente regular y una dimensión territorial muy inferior a las de Australia, Canadá o EEUU por lo que se ha elegido para esta prueba las superficies de mínima curvatura (MCS).

## 7. MÍNIMA CURVATURA

El método de mínima curvatura fue inicialmente desarrollado por Briggs (1974), se basa en minimizar la curvatura total sobre una rejilla creada a partir de una distribución discreta de puntos. La idea proviene de la ingeniería mecánica y la teoría de la elasticidad. Consiste en considerar una lámina en equilibrio donde las fuerzas actúan perpendiculares a ella y no existen ni fuerzas de cizalla ni tensiones en la misma. Las fuerzas actuantes sobre esta lámina corresponderían a los puntos REGENTE de la red, en concreto a la

distorsión de la red en esos puntos. La deformación en la lámina es descrita mediante la ecuación biarmónica siguiente:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{2\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{P}{D} \quad \text{Ec. 4}$$

$D$  se conoce como la rigidez a la flexión,  $P$  la fuerza y  $w$  el desplazamiento, siendo  $P=0$  para los puntos que no sean dato. El resultado de la ecuación anterior, junto con la condición de continuidad hasta la segunda derivada, proporciona un polinomio de tercer orden en el que las fuerzas actuantes resultan de la fuerza en el punto,  $u(x_p, y_i) = w_i$ . Las condiciones de contorno en nuestro caso son especialmente importantes dado puede existir una muy pequeña franja de terreno entre la línea de costa y los vértices próximos a ella. Con este método se asegura que no exista fuerza alguna entre el límite de los puntos dato y el borde de la rejilla, es decir, en los bordes se tiene una tendencia lineal y, en las filas y columnas límite la fuerza y el momento de plegado serán cero.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0 \quad \text{Ec. 5}$$

De la ecuación biarmónica (4) se deducen las 6 ecuaciones en diferencias finitas para los puntos de la malla que, resueltas iterativamente dan lugar a la superficie, por ejemplo, para los puntos centrales de la rejilla se utiliza la ecuación (6)

$$u_{i+2,j} + u_{i,j+2} + u_{i+2,j} + u_{i,j+2} + u_{i-2,j} + u_{i,j-2} + 2(u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j+1} + u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j-1}) - 8(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}) + 20u_{i,j} = 0 \quad \text{Ec. 6}$$

**Tabla 10. Transformación utilizando Superficies de Mínima Curvatura**

Estadísticas	$E_{MCS}$	$N_{MCS}$
# puntos	991	991
Media	0.00	0.00
Std Dev	0.02	0.02
Max	0.14	0.08
Min	-0.11	-0.12
Rango	0.25	0.20
95%	0.04	0.04
99%	0.05	0.05

La transformación empleando superficies de mínima curvatura muestra el mejor grado de ajuste como cabía esperar siendo especialmente favorable para transformar escalas grandes. Se ha generado una malla de 105" de paso que se puede observar en la figura (10) la cual representa la componente este de la distorsión. Para crear esta malla se ha calculado una transformación de 7 parámetros nueva para toda la península sin hacer distinción de zonas. El sistema de transformación mediante rejilla ha sido el elegido por canadienses, australianos, norteamericanos etc. Los dos primeros emplearon método de colocación y EEUU mínima curvatura.

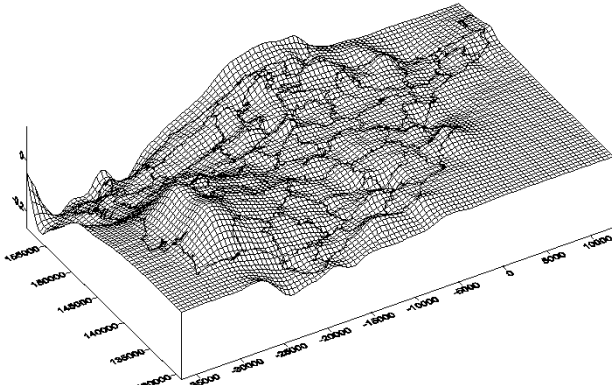


Figura 10. Componente en longitud de la distorsión. Unidades en segundos.

### 8. RUBBER SHEETING

El proceso consiste en encontrar una transformación entre las dos figuras de la red en distintos datums de manera que sean topológicamente equivalentes. La forma más adecuada de identificar las figuras de ambas redes es mediante una triangulación de Delaunay y determinar un homomorfismo lineal por partes. La forma más común consiste en obtener los parámetros de una transformación afín para cada triángulo y derivar de esta descomposición del espacio una rejilla. Este método ha sido el elegido por Gran Bretaña y Suiza.

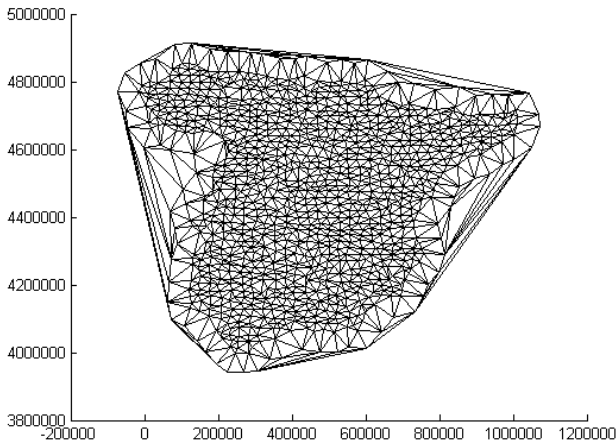


Figura 11. Triangulación Delaunay de REGENTE

En la Figura 11 se puede observar la triangulación de Delaunay de REGENTE a la que se ha añadido "puntos virtuales" cuyo vector ED50-ETRS89 se ha obtenido por transformación lineal de los más cercanos. El propósito de estos "puntos virtuales" es evitar triángulos demasiado alargados cerca de la línea de la costa. Para cada triángulo así formado se ha calculado una transformación del tipo de la

$$\begin{bmatrix} x_{ETRS89} \\ y_{ETRS89} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_x \cos \alpha_x & \mu_y \cos \alpha_y \\ \mu_x \sin \alpha_x & \mu_y \cos \alpha_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{ED50} \\ y_{ED50} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} \quad \text{Ec. 7}$$

no existiendo residuo alguno en esta transformación.

$$\begin{bmatrix} x_{ETRS89} \\ y_{ETRS89} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_x \cos \alpha_x & \mu_y \cos \alpha_y \\ \mu_x \sin \alpha_x & \mu_y \cos \alpha_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{ED50} \\ y_{ED50} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} \quad \text{Ec. 7}$$

### 9. COLOCACIÓN MÍNIMO CUADRÁTICA

El modelo común mínimo cuadrático se ve ampliado a  $Ax+s+n=K$  donde:  $A$  es la matriz de diseño,  $x$  los parámetros,  $K$  los términos

independientes,  $s$  representa la señal y  $n$  el ruido, estas últimas variables aleatorias. La colocación mínimo cuadrática tiene por objeto la determinación de los parámetros  $x$  del ajuste, la eliminación del ruido mediante filtrado y el cálculo de la señal en otros puntos que no hayan intervenido en el ajuste, esto último es especialmente útil para nuestros propósitos. En nuestro caso  $Ax$  representa la fórmula de transformación,  $s$  las distorsiones residuales y  $n$  el efecto de los errores de medida. Dado una serie de puntos  $n$  con señal conocida  $(\Delta\lambda \ \Delta\phi)$ , es posible predecir en un punto  $P$  los valores de señal  $\Delta\lambda_p \ \Delta\phi_p$  mediante el siguiente algoritmo de predicción (Moritz 1980):

$$\Delta\lambda_p = C_I C_D^{-1} \Delta\lambda \quad \text{Ec. 8}$$

con

$$C_I = (C(d_{p1}) \quad \dots \quad C(d_{pn})) \quad \text{Ec. 9}$$

y

$$C_D = \begin{pmatrix} C(d_{11}) & C(d_{12}) & \dots & C(d_{1n}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C(d_{n1}) & C(d_{n2}) & \dots & C(d_{nn}) \end{pmatrix} \quad \text{Ec. 10}$$

donde  $C_D$  es la matriz covarianza de la señal más el ruido y  $C_I$  es la matriz covarianza de la señal entre el punto  $P$  y los restantes puntos, por último  $\Delta\lambda$  corresponde a la distorsión de la red en los puntos conocidos.

$$\Delta\lambda = (\Delta\lambda_1 \ \Delta\lambda_2 \ \dots \ \Delta\lambda_n)^T \quad \text{Ec. 11}$$

La función covarianza  $C$  es determinada empíricamente y, como se puede ver en la Figura 12 marcado con cruces, sigue aproximadamente una función Gaussiana. Sin embargo, se produce una covarianza negativa a partir de los 400Km por lo que es más adecuado considerar la función covarianza de Reilly (Ec.12) que, aunque toma valores negativos raramente se utiliza esa zona de la función.

$$C(s) = C_0 \left(1 - \frac{1}{2}(s/d)^2\right) e^{-\frac{1}{2}(s/d)^2} \quad \text{Ec. 12}$$

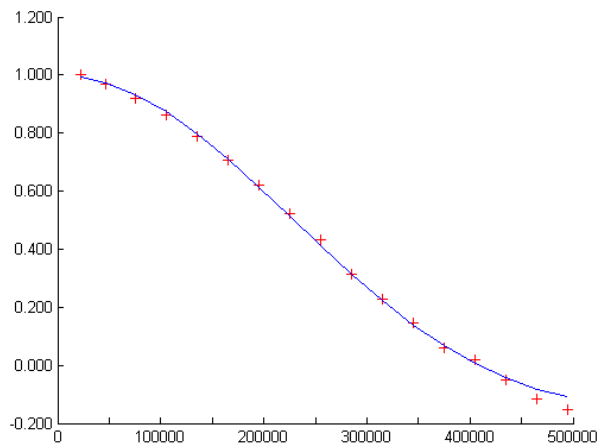
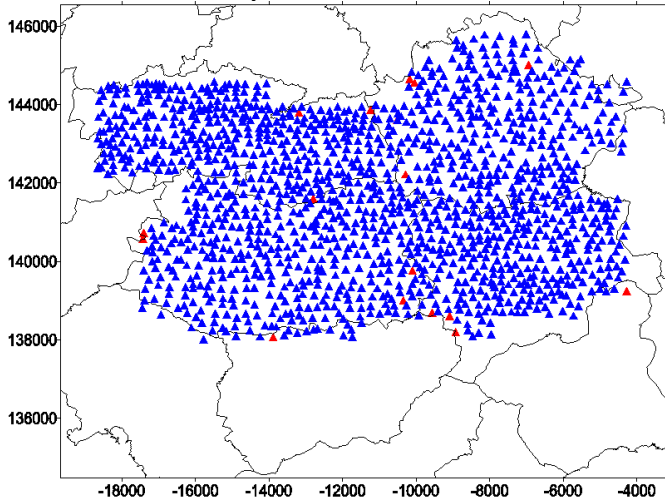


Figura 12. Función covarianza de la distorsión en longitud. La línea corresponde a la función de Reilly.

Para la distorsión en latitud se procede de idéntica manera.

## 10. PUNTOS DE TEST

Para comprobar la bondad de las transformaciones con modelado de distorsión se ha recalculado la red geodésica correspondiente a un conjunto de vértices en la zona de Castilla La Mancha empleando vértices REGENTE de coordenadas ETRS89, como ya se ha explicado, como puntos fuertemente constreñidos y, añadiendo en el ajuste observaciones terrestres de la red de orden inferior (ROI) para unos 1500 puntos. El resultado ha sido de nuevo un conjunto doble de coordenadas ETRS89 y ED50.



**Figura 13. Test sobre el recálculo de Castilla La Mancha. Unidades de ambos ejes en segundos**

Las coordenadas ED50 de la base de datos para estos vértices se han transformado mediante mínima curvatura, colocación y rubber-sheeting (en todos los métodos se ha empleado únicamente los puntos de la figura 1 para generar el modelo de distorsión), los resultados se han comparado con las coordenadas ETRS89 del nuevo ajuste. En la Figura 13 se pueden observar en azul los puntos cuyo residuo es inferior a 25cm para mínima curvatura. Los puntos de mayor diferencia corresponden a valores de frontera de límite provincial y está relacionado con el método de compensación por provincias de ED50.

**Tabla 11. Estadísticas de los puntos por debajo de 25cm de residuo. Mínima curvatura.**

Estadísticas	E <sub>TEST</sub>	N <sub>TEST</sub>
# puntos	1400	1400
Media	0.01	0.02
Std Dev	0.05	0.05
Max	0.24	0.22
Min	-0.24	-0.24
Rango	0.48	0.46
95%	0.10	0.10
99%	0.13	0.12

En cuanto a los puntos anómalos mostrados en la Tabla 14 el punto 62886 (28m) representa un valor anómalo en la base de datos por tratarse de un vértice cambiado de emplazamiento. El resto de puntos no tiene residuos extraordinariamente grandes y sin duda son achacables a efectos de frontera provincial; el cálculo de la red de orden inferior se realizó considerando fijos secuencialmente los puntos frontera de la provincia ya calculada, esto provoca que las máximas tensiones se localicen en estos puntos.

**Tabla 12. Estadísticas de los puntos por debajo de 25cm de residuo. Colocación mínimo cuadrática**

Estadísticas	E <sub>TEST</sub>	N <sub>TEST</sub>
# puntos	1400	1400

Media	0.00	-0.01
Std Dev	0.07	0.05
Max	0.24	0.19
Min	-0.25	-0.25
Rango	0.49	0.43
95%	0.13	0.11
99%	0.16	0.13

**Tabla 13. Estadísticas de los puntos por debajo de 25cm de residuo. Rubber-sheeting**

Estadísticas	E <sub>TEST</sub>	N <sub>TEST</sub>
# puntos	1395	1395
Media	0.00	-0.00
Std Dev	0.05	0.05
Max	0.23	0.22
Min	-0.24	-0.24
Rango	0.48	0.46
95%	0.10	0.09
99%	0.13	0.12

Los histogramas numéricos para los puntos anómalos

**Tabla 14. Residuos anómalos**

Mínima curvatura (longitud)

[ -28.10 -28.00 ]	1
[ -0.40 -0.30 ]	1
[ -0.30 -0.20 ]	3
[ -0.20 -0.10 ]	1
[ -0.10 +0.00 ]	1
[ +0.00 +0.10 ]	2
[ +0.20 +0.30 ]	4
[ +0.30 +0.40 ]	2
[ +0.40 +0.50 ]	1
[ +0.50 +0.60 ]	1
[ +0.90 +1.00 ]	1

Mínima curvatura (latitud)

[ -1.30 -1.20 ]	1
[ -0.30 -0.20 ]	2
[ -0.20 -0.10 ]	1
[ -0.10 +0.00 ]	3
[ +0.00 +0.10 ]	3
[ +0.10 +0.20 ]	3
[ +0.20 +0.30 ]	1
[ +0.30 +0.40 ]	1
[ +0.40 +0.50 ]	1
[ +0.50 +0.60 ]	1
[ +12.30 +12.40 ]	1

Colocación mínimo cuadrática (longitud)

[ -28.10 -28.00 ]	1
[ -0.40 -0.30 ]	2
[ -0.30 -0.20 ]	2
[ -0.10 +0.00 ]	1
[ +0.00 +0.10 ]	1
[ +0.10 +0.20 ]	1
[ +0.20 +0.30 ]	6
[ +0.30 +0.40 ]	1
[ +0.40 +0.50 ]	1
[ +0.50 +0.60 ]	1
[ +0.90 +1.00 ]	1

Colocación mínimo cuadrática (latitud)

[ -1.40 -1.30 ]	1
[ -0.40 -0.30 ]	1
[ -0.30 -0.20 ]	1
[ -0.10 +0.00 ]	4
[ +0.00 +0.10 ]	4
[ +0.10 +0.20 ]	3
[ +0.20 +0.30 ]	2
[ +0.50 +0.60 ]	1
[ +12.30 +12.40 ]	1

## Rubber Sheeting (longitud)

[ -28.10 -28.00]	1
[ -0.40 -0.30]	2
[ -0.30 -0.20]	6
[ -0.20 -0.10]	1
[ +0.00 +0.10]	3
[ +0.20 +0.30]	3
[ +0.30 +0.40]	4
[ +0.40 +0.50]	1
[ +0.50 +0.60]	1
[ +0.90 +1.00]	1

## Rubber Sheeting (latitud)

[ -1.30 -1.20]	1
[ -0.30 -0.20]	4
[ -0.20 -0.10]	1
[ -0.10 +0.00]	4
[ +0.00 +0.10]	6
[ +0.10 +0.20]	2
[ +0.20 +0.30]	1
[ +0.30 +0.40]	2
[ +0.50 +0.60]	1
[ +12.30 +12.40]	1

## 11. CONCLUSIONES

No existe forma de transformar una gran red de ámbito nacional mediante una transformación matemática simple, como 7 parámetros o polinomios, si deseamos aplicarla a escalas grandes existe una componente de distorsión difícil de absorber. La solución de modelado de distorsión ya sea mínima curvatura, colocación o rubber sheeting es el método más adecuado ya que estamos modelando los residuos de una primera transformación anterior conforme. Los tres métodos dan resultados excelentes si bien, mínima curvatura se adapta ligeramente mejor. El formato de rejilla NTV2 adoptado por australianos y canadienses permite múltiples transformaciones más localizadas dentro de la rejilla principal a medida que el recálculo de la red avanza.

El objetivo del Instituto Geográfico Nacional es poner a disposición de la comunidad de usuarios toda la información posible, previa comprobación exhaustiva de todos y cada uno de los resultados expuestos y, teniendo en cuenta las distintas especializaciones de los posibles beneficiarios de la transformación. Dewhurst (1990) distingue 3 tipos de usuarios: un primer tipo de alto conocimiento técnico formado por Geodestas, Topógrafos etc. Un segundo tipo formado por los creadores de cartografía y bases de datos espaciales con un conocimiento más limitado y, por último, un tercer tipo formado por usuarios de los productos que son generados por los segundos, navegantes, usuarios de GPS de ocio etc. con pequeño conocimiento técnico sobre el problema que nos ocupa. La forma de dar solución cumpliendo los objetivos de la introducción, sobre todo en la unicidad de la transformación, es mediante información pública y herramientas que aseguren exactamente la misma transformación a estos tres niveles de usuario.

El conjunto de herramientas que se publicarán será:

- Software ejecutable, para usuarios de todos los niveles. Actualmente en fase beta.
- Página web con servlets en Java, Vbscript o similar que permitan efectuar transformaciones de forma interactiva; solución adecuada para usuarios de tercer nivel.
- Objetos tipo OCX o DLL para integradores de información espacial o usuarios avanzados. Estas herramientas permiten a los productores de software integrar la solución con plena garantía de funcionamiento
- Rejillas de transformación para todos los productos mencionados anteriormente con formato NTV2, disponibles actualmente para los métodos de colocación y mínima curvatura.

## 12. REFERENCIAS

- Appelbaum L.T. "Geodetic datum transformation by multiple regression equations" (1982) *Proceedings of the 3<sup>rd</sup> International Symposium on Satellite Doppler*, New Mexico State University, Las Cruces, New Mexico, 207-203
- Ardizzone, J.A. "Análisis de datos aeromagnéticos. Metodologías y aplicación al levantamiento aeromagnético de España peninsular" (1998). *Instituto Geográfico Nacional*. Ministerio de Fomento. 228pp
- Briggs, I.C. "Machine contouring using minimum curvature" (1974) *Geophysics*, 39-48
- Collier P, Argeseanu, V.S., Leahy F.J. "Distorsion modelling and the transition to GDA94" (1998) *The Australian surveyor* 43-1. 29-40
- Collier, P. "Reactions to the new geocentric datum of Australia" (1997) *The trans tasmanian surveyor*. Vol1, 35-44
- Collier, P. "Transition to the geocentric datum of Australia" (1996) *Consultants report to the office of surveyor general, Victoria* 91pp
- Dalda, A. "DGPS y levantamientos topográficos. Su empleo en actualización del Mapa Topográfico Nacional" (1997). Mapping nº38.
- Dalda, A. "Parámetros de transformación entre sistemas de referencia terrestre", (2000), *Instituto Geográfico Nacional*, reporte interno.
- Dewhurst, W.T. "The application of minimum curvature-derived surfaces in the transform of positional data from the North American datum of 1927 to the North American Datum of 1983" (1990) *NOAA Technical Memorandum* 30pp
- Draper, N.R., Smith, H. "Applied regression analysis" (1981). Wiley
- Featherstone, W.E. "A comparison of existing co-ordinate transformation models and parameters in Australia"
- García de Arango, A. "Elasticidad teórica" segunda edición. Instituto Geográfico Nacional.
- González-Matesanz, F.J., Dalda-Mourón, A.. Development of the ED50-ETRS89 transition. Euref Symposium. Ponta Delgada, Azores. 2002
- González-Matesanz, F.J., Dalda-Mourón, A.. Estrategias para la transición ED50-ETRS89. 3ª Asamblea Hispano-Portuguesa de Geodesia y Geofísica. 2002
- Greaves, M., Cruddace, P. "The adoption of ETRS89 as the National Mapping System for GB, via a Permanent GPS Network and Definitive Transformation". EUREF Symposium 2001.
- Lachapelle, G. "Least Squares predictions of horizontal coordinate distortions in Canada". *Bulletin Geodesique* 56 242-257
- Love, A.E.H. "A treatise on the mathematical theory of elasticity" fourth edition. Dover publications
- Moritz H. Advanced Physical Geodesy. Herbert Wichmann Verlag. Karlsruhe. 1980
- Peña, D. "Estadística, modelos y métodos. 2. Modelos lineales y series temporales" (1999) *Alianza Universidad*. 745pp
- Regidor Gutierrez, J. "El proyecto REGENTE" (2000). *VII Congreso Nacional de Topografía y Cartografía*. 87-93. 2000.
- Saalfeld, A. "A fast Rubber-Sheeting transformation using simplicial coordinates". *The American Cartographer*. Vol 12. 169-173. 1985
- Snyder, P.J. "Computer Assisted Map Projection Research" (1985) *U.S Geological Survey*. 157pp
- Swain, C.J. "A Fortran IV program for interpolating irregularly spaced data using the difference equations for minimum curvature". *Computers & Geosciences*. Vol 1 231-240.
- White, M.S., Griffin, P. "Piecewise Linear Rubber-Sheet Map Transformation". *The American Cartographer*. Vol 12. 123-131. 1985